

② Théorème CPT :

→ CP est violé par les If, mais on croit que toutes les interactions sont invariantes pour CPT, où T est l'opérateur de renversement du temps.

Thm: Le théorème CPT dit que la symétrie CPT est une propriété intrinsèque de toute théorie quantique et relativiste des champs dans laquelle les signaux ne peuvent se propager plus vite que la lumière dans le vide.

Une conséquence du théorème est que :

$$m_p \equiv m_{\bar{p}}, \quad \tau_p \equiv \tau_{\bar{p}} \quad \text{et} \quad \mu_p^B \equiv \mu_{\bar{p}}^B \quad \text{où } \mu^B \text{ est le moment magn.}$$

→ Aucune violation du thm CPT n'a été observée actuellement.

3 MODÉLISATION DES INTERACTIONS FONDAMENTALES ET PREDICTIONS

3.1 Nécessité d'une théorie quantique et relativiste

→ Particules de petites dimensions → théorie quantique suffit pour étudier les états liés (ex: $H=(p,e^-)$)

↳ vitesse faible, # de particules conservé

→ A haute énergie $v/c \sim 1 \rightarrow$ relativité

↳ Invariance pour les transformation de Lorentz

↳ $E=mc^2 \rightarrow$ création-disparition

↳ Théorie quantique et relativiste.

3.2 Premières tentatives

② Equation de Klein-Gordon (rappel) :

→ Equation de Schrödinger (1926):

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V \right\} \psi = 0$$

↳ relation de dispersion classique: $E = p^2/2m + V$

avec $E \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ et $p_x \leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

→ Équation de Klein-Gordon (1927):

$$\left\{ \frac{-1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right\} \psi = 0$$

↳ relation de dispersion relativiste: $\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2$ avec $\hbar \omega$
 $E \leftrightarrow i\hbar \partial_t$ et $p_x \leftrightarrow -i\hbar \partial_x$.

→ On réécrit l'éq de KG sous forme invariante pour les transfos de Lorentz:

$$\{\partial^\mu \partial_\mu + m^2 c^2 / \hbar^2\} \psi = 0$$

$$p = \hbar k, E = \hbar \omega$$

→ Solution si $V=0$ pour une particule:

$$\psi = B \cdot \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] = B \exp[i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et) / \hbar]$$

↳ Exemple: le photon ($m_\gamma = 0$) on retrouve l'éq. d'onde:

$$\Delta \psi = 1/c^2 \partial_t^2 \psi \Leftrightarrow \square \psi = 0$$

Pour une onde stationnaire, on retrouve l'éq. de Laplace:

$$\Delta \psi = 0$$

→ Problème des énergies négatives: $E = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$

Cela donne une densité de probabilité négative:

① Densité de proba. chez Schrödinger:

$$i\hbar \psi^* (ES) - i\hbar \psi (ES)^* = 0 \Leftrightarrow$$

$$i\hbar \psi^* \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + i\hbar \partial_t \right) \psi - i\hbar \psi \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - i\hbar \partial_t \right) \psi^* = 0$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \psi^* \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \psi^* \partial_t \psi - i\hbar \psi \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* - \psi \partial_t \psi^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \psi^* \partial_t \psi + \psi \partial_t \psi^* = \frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*)$$

$$\Leftrightarrow \partial_t (\psi \psi^*) = -\nabla \cdot \left[\frac{-i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \right] \Leftrightarrow \partial_t \rho + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

$$\text{où } \rho = |\psi|^2 \text{ et } \vec{j} = \frac{-i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

On retrouve une densité de probabilité $\hbar$ s positive.

② Densité de probabilité chez KG:

$$i\psi^*(KG) - i\psi(KG)^* = 0$$

$$i\psi^*\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \nabla^2\right)\psi - i\psi\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \nabla^2\right)\psi^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-i}{c^2}\psi^*\partial_t^2\psi + i\psi^*\nabla^2\psi + \frac{i}{c^2}\psi\partial_t^2\psi^* - i\psi\nabla^2\psi^* = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-i}{c^2}\partial_t\left[\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*\right] + i\nabla\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \text{ avec } j^\mu = \left(\frac{\rho}{c}, \vec{j}\right) \text{ et } \rho \equiv i(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*)$$

→ Lorsqu'on injecte $\psi = B \exp[-ip \cdot x]$, on obtient:

$$\rho = i(B^* e^{+ipx} \cdot 0 - B e^{-ipx} \cdot ip_B \cdot B^* e^{ipx})$$

$$= B^2 \cdot p/B = E/B^2$$

→ la densité de proba. n'est pas définie positive si $E < 0$!

② Équation de Dirac:

→ Pour supprimer les solutions d'énergie négative, Dirac envisage de trouver une équation linéaire en les dérivées partielles.

$$E \leftrightarrow i\hbar \partial_t \text{ soit } i\hbar \partial_t \psi = \hat{H} \psi$$

→ Pour être invariant de Lorentz, il faut que $\hat{H}$ soit aussi linéaire en ∂_{x_i} , et donc du type:

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^3 \gamma_j (-i\hbar c \partial_{x_j}) + \gamma_0 mc^2 = \sum_{j=1}^3 \gamma_j \hat{p}_j + \gamma_0 \hat{p}_0 \quad (1)$$

→ Pour être relativiste, il faut que $\hat{H}^2 = \vec{\hat{p}}^2 c^2 + m^2 c^4 = p_i p_i + m^2 c^4 \quad (2)$

$$\Leftrightarrow (1)^2 \stackrel{!}{=} (2) \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^3 \gamma_j \hat{p}_j + \gamma_0 \hat{p}_0 \right)^2 \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^3 \hat{p}_i^2 + \hat{p}_0^2 \text{ ce qui implique:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \gamma_i \gamma_j = -\gamma_j \gamma_i \text{ si } i \neq j \\ \rightarrow \gamma_0^2 = 1 \text{ et } \gamma_i^2 = \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1 \end{array} \right\} \text{ les } \gamma \text{ sont matrices } 4 \times 4!$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \hat{H}^2 = p^\mu p_\mu &= (\gamma^\mu p_\mu)^2 = m^2 c^2 \Leftrightarrow (\gamma^\mu p_\mu)^2 - m^2 c^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\gamma^\mu \hat{p}_\mu - mc)(\gamma^\mu \hat{p}_\mu + mc) = 0 \end{aligned}$$

On obtient $(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0$, ou encore

$$[i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc]\psi = 0 : \text{l'équation de Dirac}$$

- Le choix des γ^μ n'est pas unique. Il existe 4 représentations: Weyl, Dirac, Majorana, ...
- Les solutions (fonctions d'ondes) sont des matrices colonne à 4 éléments. Ce sont les spineurs de Dirac.

② Solutions de l'équation de Dirac

→ Soit une particule libre au repos ($\vec{p}=0$), d'énergie E . Alors:

$$\psi(E, \vec{r}) = \psi(E, 0) \cdot e^{-iEt/\hbar} \text{ indépendant de la position}$$

→ L'équation de Dirac se réduit alors:

$$i\hbar \gamma^0 \partial_0 \psi(E, 0) e^{-iEt/\hbar} = mc \psi(E, 0) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \gamma^0 \psi(E, 0) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [e^{-iEt/\hbar}] = mc \psi(E, 0) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \gamma^0 \psi(E, 0) (-iE/\hbar) = mc^2 \psi(E, 0)$$

$$\Rightarrow E \gamma^0 \psi(E, 0) = mc^2 \psi(E, 0) \text{ avec } \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$$

Dans la représentation de Dirac-Pauli, $\gamma^0 = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$

↳ ψ_1 et ψ_2 correspondent à 2 états d'énergie $E = mc^2$

↳ ψ_3 et ψ_4 correspondent à 2 états d'énergie $E = -mc^2$

→ Densité de probabilité et courant de probabilité:

→ On applique la même méthode; on arrive à l'équation de continuité suivante: $\nabla_\mu (\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi) + \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = 0$

On identifie la densité de probabilité:

$$\rho = \psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 > 0 \text{ tjs positif!!!}$$

→ La dégénérescence des états d'énergie E et $-E$ indique l'existence d'un autre opérateur qui commute avec H : l'hélicité: $h \equiv \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p}$ avec

$$\hat{h} \equiv \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{p} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix}$$

Or, les matrices γ peuvent s'écrire en fct des matrices de Pauli:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation de Dirac pour une particule de quantité de mouvement $\vec{p}$ devient:

$$\not{p} \gamma^{\mu} \psi(E, \vec{p}) = mc^2 \psi(E, \vec{p})$$

$$\left[E \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} - mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = 0$$

↳ C'est l'hélicité ($\rightarrow$ sign de projection du spin) qui va

lever la dégénérescence :

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(E, \uparrow) \\ \psi(E, \downarrow) \\ \psi(-E, \uparrow) \\ \psi(-E, \downarrow) \end{pmatrix}$$

↳ L'équation de Dirac contient une description du spin des particules de spin 1/2.

② Explication de Dirac pour $E < 0$:

→ Propose que tout les états $E < 0$ sont déjà remplis par une mer de Dirac

↳ Lorsque on excite un électron de la mer, on devrait voir une particule d' $E < 0$ mais identique à l' e^- .

③ Explication de Stueckelberg et Feynman pour $E < 0$: (1940)

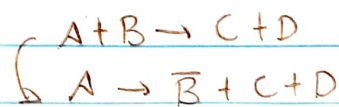
→ Un e^+ est une particule $E > 0$ qui remonte le temps:

$$\psi(E, t) = \psi(E, 0) e^{-i(E)(-t)} = \psi(E, 0) e^{-iEt}$$

→ Symétrie croisée:

Si une réaction existe, toute

autre réaction obtenue par symétrie croisée existe aussi (à condition qu'elle soit cinématiquement possible).



→ Pour permettre des états $\vec{p}$ multiples particules dont le # varie,

→ QFT.

3.3 Ingrédients de QFT

- ① Associer un champ ϕ aux particules
- ② Écrire une action: $S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$
- ③ Loi de conservation observées $\rightarrow$ symétries imposée à $\mathcal{L}$
- ④ Quantification.

① Classification des champs:

$\rightarrow$ En fonction de la manière dont ils se transforment sous l'effet d'une transformation de Lorentz des coord. x^μ :

① Champ scalaire: $\phi(x^\mu) \mapsto \phi'(x^\mu) = \phi(x^\mu)$
 $\rightarrow$ particule de spin 0

② Champ vectoriel: $V^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu V^\nu$
 $\rightarrow$ particule de spin 1

③ Champ spinoriel: $\psi(x) \mapsto \exp\left[\frac{-i}{2} \omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}\right] \psi(x)$
 $\rightarrow$ part. de spin 1/2.

$\rightarrow$ On veut écrire $A \rightarrow C + C + \dots$ ou $A + B \rightarrow C + C + \dots$

3.4 Application du formalisme lagrangien en QFT

$\rightarrow$ Classiquement, un système de n particules est décrit par son action S , qui est une intégrale du Lagrangien L

$\rightarrow$ Les trajectoires classiques sont déterminées par le principe de moindre action:

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} = 0$$

$\rightarrow$ En QFT, on a $S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ avec $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$
 $\hookrightarrow$ Les eq. d'Euler-Lagrange s'écrivent:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

① Formulation lagrangienne de l'éq. de K-G :

→ Soit $\phi(x)$ le champ scalaire de K-G ($spin=0$). En unités naturelles, le lagrangien est :

$$\mathcal{L} = \underbrace{(\partial_\mu \phi(x))^\dagger \partial^\mu \phi(x)}_{\text{terme cinétique}} - \underbrace{m^2 \phi(x)^\dagger \phi(x)}_{\text{terme de masse}}$$

↳ Le terme m^2 est là car $[\partial_\mu] = L^{-1} = M$

↳ Eq de E-L : $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$

→ Le lagrangien est invariant pour la transformation de jauge globale $U(1)$: $\phi(x) \mapsto e^{i\alpha} \phi(x)$

↳ Trouver son courant de Noether associé :

$$\begin{aligned} 0 = \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \delta (\partial^\mu \phi) + (\phi \leftrightarrow \phi^\dagger) \\ &= i\alpha \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \right) \right]}_{=0} + i\alpha \partial^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \right) - (\phi \leftrightarrow \phi^\dagger) \end{aligned}$$

courant de Noether

Dans notre cas, le courant conservé est :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 ; \quad j^\mu = -i\alpha \left(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^* \right) \text{ courant em!}$$

et sa charge associée est : $Q = \int d^3x j^0$

② Formulation Lagrangienne de l'éq. de Dirac :

→ Soit Ψ le spineur associé à une particule libre de masse m et de spin $1/2$. Son lagrangien est :

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2) \Psi \quad \text{linéaire en } \partial_\mu$$

avec $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$ est le spineur adjoint

↳ Eq de E-L : $(i\gamma^\mu \partial_\mu - mc/\hbar) \Psi = 0$

→ Ce lagrangien est également invariant pour une transfo de jauge globale : $\Psi \mapsto e^{iq\theta} \Psi$

③ Equation de Proca:

→ Soit le champ de vecteurs A^μ (de masse m , spin 1). Son lagrangien est donné par:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\nu) + \frac{1}{2} (A^\mu A_\mu)$$

On définit le champ tensoriel $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, ce qui permet d'écrire le lagrangien:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\mu A_\mu$$

↳ Les eq d'E-L : $\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0$ eq. de Proca

→ Si on identifie les A_μ au potentiel élm, les champs sont définis par $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ et $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\delta \vec{A}}{\delta E}$. On a alors

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \text{ et } F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2 \vec{E}^2 - 2 \vec{B}^2$$

et l'eq. de Proca pour $m=0$ conduit aux eq. de Maxwell dans le vide: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu = 0$

3.5 Symétrie de jauge locale

→ Les $\mathcal{L}$ vu jusqu'à présent sont tous invariants pour une transformation de jauge globale ($\rightarrow$ conservation de la charge électrique). Mais ils ne le sont pas pour une transfo de jauge locale: $\psi \mapsto e^{iq\theta(x)} \psi$

Toutefois, on peut l'imposer (intuition + résultats) en modifiant $\mathcal{L}$.

③ Exemple avec le $\mathcal{L}$ de Dirac:

On a $\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi$ avec $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$

On effectue la transformation $\psi \mapsto e^{iq\theta} \psi$ avec $\theta = \theta(x)$

$$\rightarrow \mathcal{L}' = \bar{\psi} e^{-iq\theta} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{iq\theta} \psi$$

$$= \mathcal{L} + \bar{\psi} \gamma^\mu \psi i q \partial_\mu \theta(x) = \mathcal{L} - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \cdot \partial_\mu \theta(x)$$

→ On pose alors un nouveau lagrangien en ajoutant un champ de jauge faisant intervenir A_μ (pour garder l'invariance voulue):

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \cdot A_\mu$$

$$= \bar{\psi} (i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \cdot A_\mu$$

→ On impose une transformation de jauge locale $\psi \rightarrow e^{iq\theta} \psi$

$$\mathcal{L}' \mapsto \mathcal{L}' - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \cdot \partial_\mu \theta - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \cdot \partial_\mu A_\mu$$

On impose alors que, sous l'effet d'un transfo de jauge, A_μ se transforme selon $A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu \theta$

On a alors bien que $\mathcal{L}'$ est invariant sous transfo de jauge locale.

→ Sens de ce nouveau Lagrangien?

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} (i \hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - m c^2) \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \cdot A_\mu$$

Nous avons ajouté un terme de couplage entre le champ fermionique ψ et un nouveau champ vectoriel A_μ , un terme d'interaction entre un fermion une particule de spin 1/2, avec une constante de couplage q .

↳ Le lagrangien doit donc aussi comporter un terme correspondant à cette particule libre.

→ La forme générale pour un champ vectoriel libre est:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\mu A_\mu$$

$$\text{avec } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Or, seul le 1^{er} terme est invariant sous $A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu \theta$.
Cela impose que $m=0$: c'est le champ du photon!

? → Nous avons obtenu le couplage du champ de jauge A_μ au courant fermionique $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ avec une constante de couplage q , qui correspond à la charge électrique.

Invariance de jauge locale $\Rightarrow m_\gamma = 0$

Dérivées covariantes

→ Pour ajouter la correction appropriée au $\mathcal{L}$, on remplace les dérivées habituelles par les dérivées covariantes

$$\partial_\mu \mapsto D_\mu \equiv \partial_\mu + i q A_\mu$$

On obtient alors

$$\mathcal{L}' = \bar{\Psi} (i \gamma^\mu D_\mu - m) \Psi = 0$$

On trouve l'action de la QED:

$$S_{\text{QED}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\Psi} (i \gamma^\mu D_\mu - m) \Psi \right]$$

Calcul des amplitudes de transition par le calcul des perturbations

→ En QFT, les systèmes sont complexes et les équations non linéaires $\Rightarrow$ résolution exacte impossible. On développe alors une théorie des perturbations appliquée aux leptons, quarks et gluons libres.

→ Pour effectuer le calcul perturbatif:

$$\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) = \mathcal{L}_{\text{libre}}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i) + \mathcal{L}_{\text{interaction}}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i, \underbrace{\alpha_{\text{em}}}_{I_{\text{em}}}, \underbrace{\alpha_s}_{I_s}, \underbrace{\alpha_g}_{I_g})$$

↳ Seules certaines théories en QFT permettent ce développement: ce sont les théories renormalisables.

→ Soit $|i\rangle$ l'état initial, avant interaction

→ 1 particule: disintégration

→ 2 particules: interaction

Soit $|f\rangle$ l'état final, après interaction $\rightarrow$ plusieurs particules

↳ La proba de transition P est proportionnelle à

$$P \propto |\mathcal{M}_{fi}|^2 = |\langle f | H | i \rangle|^2$$

avec $\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_1^{(1)} + \mathcal{M}_2^{(1)} + \mathcal{M}_1^{(2)} + \mathcal{M}_2^{(2)} + \mathcal{M}_3^{(2)} + \mathcal{M}_1^{(3)} + \dots$

où $\mathcal{M}_i^{(n)}$ est l'amplitude du $i^{\text{ème}}$ diagramme d'ordre n , ie avec $n+1$ vertex

ordre 1



ordre 2



ordre 3



② Probabilité du processus physique :

→ En général, la proba P d'un processus physique est
 $P = \sum P_i$ où P_i est la proba associée à un diagramme, et
 $P_i \propto \prod_j P_j$, où P_j est la proba associée à un vertex.

→ Exemple: QED

↳ $P_j \propto g^2 \propto \alpha_{em}$ avec g : # charge et $\alpha_{em} = \frac{1}{4\pi} \propto e^2$

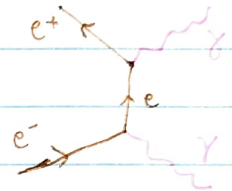
Pour les quarks: $g = \pm 1/3$ ou $\pm 2/3$

↳ exemple: $e^+e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

$P \propto q = e$: proba de transition pour 1 vertex

→ Proba d'émission / d'absorption d'un γ :

$$\propto e^2 \propto \alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c}$$

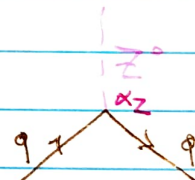
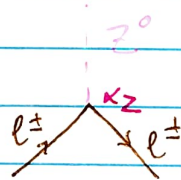
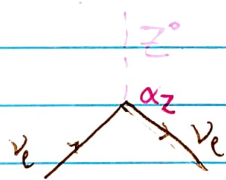


→ Pour le diagramme: $P \propto e^4 \propto \alpha_{em}^2$

↳ Chaque diagramme d'ordre n contribue avec une proba de $\alpha^{(n+1)}$ où α est la cte de couplage et $n+1$ le # de vertex

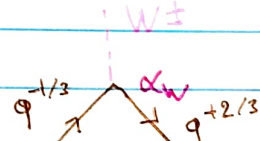
→ Exemple: Interaction faible:

1) Courant neutre



$$\alpha_Z \equiv \frac{g_Z^2}{4\pi \hbar c}$$

2) Courant chargé:



$$\alpha_W = \frac{g_W^2}{4\pi \hbar c}$$

③ Théorie des perturbations - principe:

→ Utilisation de la théorie des perturbations en MQ non relativiste pour calculer les probabilités de transition par unité de temps ou taux de transition W d'un état $m \rightarrow k$

→ Supposons le système dans un état initial d'énergie E_m :

$$\psi(t > 0) = \phi_m e^{-iE_m t / \hbar} \quad \text{où} \quad \phi_m = e^{i\vec{p}_m \cdot \vec{r} / \hbar}$$

Les fct ϕ_m sont des rep de H_0 de rap E_m :

$$H_0 \phi_m = E_m \phi_m$$

↳ La transition vers un autre état se traduit par l'ajout d'un terme d'énergie potentielle V dans l'éq. de $\ddot{S}$:

$$H\Psi = (H_0 + V)\Psi = i\hbar \partial_t \Psi$$

↳ En $t \geq 0$, la fct d'onde est une superposition d'états possibles:

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \phi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

On introduit dans l'équation de Schrödinger:

$$i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dc_n(t)}{dt} \phi_n e^{-iE_n t/\hbar} = \sum_{n=0}^{\infty} V c_n(t) \phi_n e^{-iE_n t/\hbar}$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \frac{dc_k(t)}{dt} = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(t) \int \phi_k^* V \phi_m d^3\mathbf{r} e^{-i(E_m - E_k)t/\hbar}$$

où $M_{mk} \equiv \int \phi_k^* V \phi_m d^3\mathbf{r}$ est l'élément de matrice

correspondant à la proba de transition de l'état n vers k .

→ On suppose l'interaction suffisamment faible pour ne considérer que les transitions directes $m \rightarrow k$, ce qui est équivalent à considérer $c_m(t) \sim 1$ et $c_n(t) \sim 0$ pour $m \neq n$. En intégrant, on obtient:

$$\begin{aligned} c_k(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_0^t M_{mk} e^{-i(E_m - E_k)t'/\hbar} dt' \\ &= M_{mk} \frac{1 - e^{-i(E_m - E_k)t/\hbar}}{E_m - E_k} \end{aligned}$$

→ En général, le système est dans un état superposé de $\neq$ état finaux.

On a alors $W = \frac{1}{t} \sum_i |c_i(t)|^2$ ex: plusieurs états de spin

→ Dans le cas où l'énergie peut se répartir dans un grand nombre de manières (ex: désintégration à 3 corps), on peut faire l'approx suivante:

$$W_{mk} = \frac{1}{t} \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} |c_k(t, E)|^2 \frac{dN}{dE} dE$$

$$W_{m \rightarrow k} = \frac{1}{t} \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} \left| M_{mk} \frac{1 - e^{-iEt/\hbar}}{E} \right|^2 \frac{dN}{dE} dE$$

$$= \frac{1}{t} \int_{E_{\min}}^{E_{\max}} |M_{mk}|^2 \frac{4 \sin^2(Et/2\hbar)}{E^2} \frac{dN}{dE} dE$$

$$= \frac{4 |M_{mk}|^2}{2\hbar} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \frac{dN}{dE} dx$$

Posons $x = \frac{Et}{2\hbar}$

$$\approx \frac{2 |M_{mk}|^2}{\hbar} \frac{dN}{dE} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

car $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ est piqué en $x=0$
 $\rightarrow$ on approx. $\frac{dN}{dE} = \text{cst}$

On trouve $W_{m \rightarrow k} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{mk}|^2 \frac{dN}{dE}$. C'est la règle d'or de Fermi classique.

où dN/dE est le facteur d'espace des phases : c'est la densité d'état finale

① Propagateur et transfert d'impulsion :

→ Pour une transition d'un état i vers un état f , on peut écrire :

$$M_{if} = g_0 \int \phi_i^* U(\vec{r}) \phi_f d^3r \text{ où l'énergie potentielle est}$$

$V(\vec{r}) = g_0 U(\vec{r})$ où g_0 est lié à l'intensité du couplage du fermion placé dans le potentiel avec celui-ci.

ex: potentiel électrostatique : $g_0 \propto \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$

→ Puisque $\phi_i = e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{r}/\hbar}$ et $\phi_f = e^{i\vec{p}_f \cdot \vec{r}/\hbar}$. D'où l'on a :

$$M_{if} = g_0 \int U(\vec{r}) e^{i(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \cdot \vec{r}/\hbar} d^3r = g_0 \int U(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar}$$

DEF avec $\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ le transfert d'impulsion. On définit également le DEF propagateur bosonique

$$M(q) = g_0 \int U(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$$

C'est la probabilité qu'un fermion transfère une impulsion q à un autre fermion par l'intermédiaire d'un boson échangé.

Le lieu de l'échange est appelé un vertex

(émission ou absorption)

→ Exemple: potentiel du type Yukawa.

→ Soit le potentiel $U(\vec{r}) = U(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-r/R}$ avec $R = \frac{\hbar}{mc}$

↳ g fixe l'intensité du champ

↳ ex: si $m=0$, alors $U(r) = Ze/r$ imposant $g = 4\pi Ze$

→ Calculons le propagateur:

$$\mathcal{M}(q) = \int \frac{g}{4\pi r} e^{-r/R} \cdot e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3r$$

$$= \frac{g_0 \cdot g}{4\pi} \int \frac{1}{r} \cdot e^{-r/R} \cdot e^{iqr \cos \theta} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$$

$$= \frac{g_0 \cdot g}{2} \int_0^\infty e^{-r/R} \cdot r \cdot e^{iqr \cos \theta} \sin \theta d\theta dr$$

$$= g_0 \cdot g \int e^{-r/R} \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr$$

$$\boxed{\mathcal{M}(q) = \frac{g_0 g}{q^2 - m^2}}$$

↳ le facteur $\frac{1}{q^2 - m^2}$ montre que si $\vec{q}$ est grand, $\mathcal{M}$ est petit.

↳ g et g_0 sont les constantes de couplage de chaque fermion interagissant au boson échangé. Intervient à chaque vertex.

③ Constante de couplage des I_f :

→ Soit une interaction $A+B \rightarrow A+B$ se produisant via l'échange d'une particule massive de masse M_W . Si $M_A \gg M_B$, on considère A immobile, produisant le potentiel dans lequel B est plongée:

$$V(r) = \frac{-g_W^2}{4\pi} \cdot \frac{e^{-r/R}}{r}$$

où $R = \frac{\hbar c}{M_W}$ est la portée d'interaction.

→ On a $\mathcal{M}(q) = \frac{g_W^2 \hbar^2}{q^2 - M_W^2 c^2}$. Ce calcul fait à l'ordre le plus bas correspond à l'échange d'une seule particule. A petit transfert d'impulsion: $q^2 \ll M_W^2 c^2$, on fait l'approximation d'une interaction ponctuelle, ie de portée nulle.



On simplifie le calcul:

$$\mathcal{M}(q) \simeq \frac{-g_W^2 \hbar}{M_{W^{\pm}}^2} = \frac{-4\pi \alpha_W (\hbar c)^2}{(M_{W^{\pm}} c^2)^2} \equiv -G_F$$

où G_F est la constante de Fermi et $\alpha_W \equiv \frac{g_W^2}{4\pi \cdot \hbar c}$

→ Si on ne néglige pas les spins des particules, on obtient:

$$\frac{4\pi \alpha_W}{(M_{W^{\pm}} c^2)^2} \equiv \frac{8}{\sqrt{2}} \frac{G_F}{(\hbar c)^2}$$

→ Experimentalement, on trouve $\alpha_W \approx \frac{1}{30} > \alpha_{em}$

↳ la faiblesse de l'interaction faible ne vient pas de sa constante de couplage α_W mais de la masse élevée des bosons $W^{\pm}$ et Z^0 qui sont échangés!

↳ Toutefois, $\alpha_W \ll 1 \rightarrow$ théorie renormalisable permettant un traitement perturbatif

QED + IF = théorie électrofaible $\subset$ MS

③ L'interaction forte:

→ Chaque quark possède une charge de couleur, et chaque gluon une couleur + anticouleur.

→ Il y a 8 combinaisons indépendantes de couleur-anticouleur non invariantes pour la permutation de 2 couleurs. Elles forment un octet de $SO(3)_{\text{couleur}}$:

$$R\bar{B}, R\bar{V}, B\bar{V}, B\bar{R}, V\bar{R}, V\bar{B}, \frac{R\bar{R}-V\bar{V}}{\sqrt{2}}, \frac{R\bar{R}+V\bar{V}-2B\bar{B}}{\sqrt{6}}$$

↳ La dernière combinaison constitue un singulet de $SO(3)_{\text{couleur}}$:

$$R\bar{R} + V\bar{V} + B\bar{B} \quad (\text{invariant par la permutation})$$

↳ Seul les singulets de couleur (état "blanc") existent à l'état libre

→ Les $q, \bar{q}$ et les 8 gluons colorés de l'octet sont confinés à l'intérieur des systèmes liés: les hadrons (tjs blancs). Les plus communs sont les baryons et les mésons.

→ La masse des gluons est nulle, mais leurs interactions se font à petite distance à cause du confinement des gluons colorés à l'intérieur des hadrons.

Le 9^e gluon pourrait en théorie exister à l'état libre mais n'est observé on suppose qu'il n'existe pas.

→ Empiriquement, on définit le potentiel d'interaction entre hadrons selon $V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + Kr \sim$ ressort

↳ La composante élastique de V implique la fragmentation des quarks et des gluons, et l'hadronisation (jets de hadrons)

① Constante de couplage des IF: α_s

→ Puisque $m_\gamma = m_g = 0$ (boson des IF et des IF de masse nulle), on peut obtenir α_s apd taux de désintégration, par interaction forte et é-m pour 2 particules de masse voisine

IF: $N^* \rightarrow N + \pi$, $\tau_s \sim 10^{-23}$ s

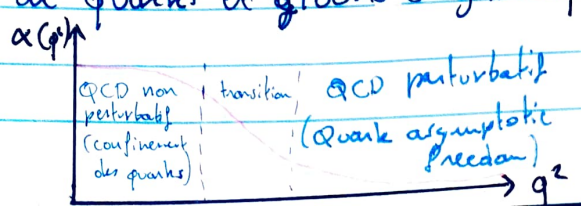
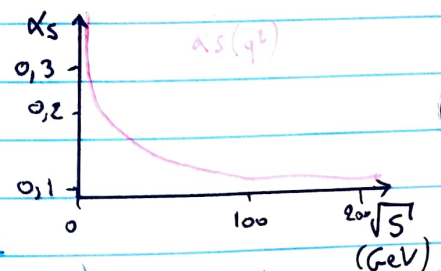
Iém: $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$, $\tau_{em} \sim 10^{-19}$ s

Or, $\alpha \sim \sqrt{\frac{\Gamma}{\tau}} \sim \sqrt{\Gamma}$ (car $\Gamma \sim 1/\tau \sim \alpha^2$)

On a donc $\frac{\alpha_s}{\alpha_{em}} \sim \sqrt{\frac{\tau_{em}}{\tau_s}} \sim \sqrt{10^4} = 100 \sim \alpha_s \sim 1$

↳ La théorie n'est pas valide dans le cas des désintégrations fortes des hadrons!

→ Cependant, on observe que lorsque $\sqrt{s} \uparrow$, $q^2 \uparrow \rightarrow r \downarrow$. La conséquence est la liberté asymptotique (propriété que la constante de couplage décroît à faible distance). On peut alors appliquer un calcul perturbatif pour décrire les quarks dans les hadrons et les interactions de quarks et gluons à grand q^2 .



② Dépendance des constantes de couplage en q^2 :

→ La variation de α avec q^2 est due aux fluctuations quantiques qui produisent des paires $f\bar{f}$ (fermion-antifermion).

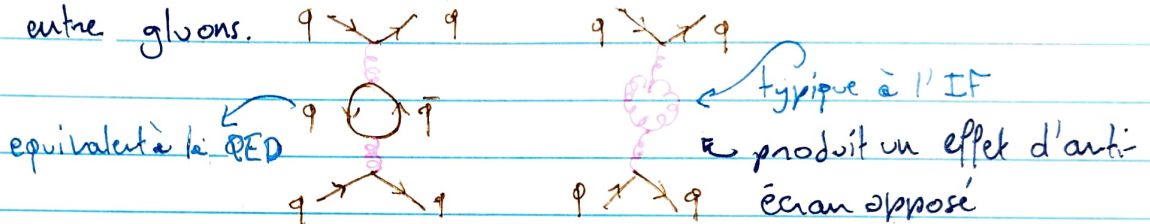
Exemples:



↳ Les fluctuations quantiques agissent à la manière de la polarisation d'un diélectrique qui réduit le $\vec{E}$ extérieur (effet d'écran)

→ Cas de l'IF:

→ La liberté asymptotique de l'IF est liée à l'interaction entre gluons.



→ Puisque $\alpha = \alpha(q)$, on peut se demander si $\exists q$ tq $\alpha_s = \alpha_w = \alpha_z = \alpha_{em}$ (Modèle MSSM)

3.7 Calcul des taux de désintégration et des sections efficaces d'interaction

3.7.1 Méthode générale:

- ① Identifier les $\neq$ diagrammes de Feynman susceptibles de contribuer au processus étudié (à l'ordre considéré)
- ② Calculer les amplitudes correspondantes $m_{fi}^{(i)}$ et l'amplitude totale $\mathcal{M}$ dans la théorie appropriée: QED, QCD ou faible
- ③ Introduire $\mathcal{M}$ dans la règle d'or de Fermi relativiste valable pour un taux de désintégration Γ ou pour une section efficace σ

→ L'amplitude dépend de $|i\rangle$, $|f\rangle$, $\vec{p}_i$ (calcul $\rightarrow$ QFT).

- En plus de l'amplitude, la proba de transition fait intervenir le facteur d'espace des phases dN/dE disponible pour le processus.
- ↳ Facteur purement cinématique
 - ↳ Plus il y a de place dans l'espace des phases, plus le processus a des chances de se produire
 - ↳ exemple: particule nanite $\rightarrow$ particules beaucoup plus légères: grand $\frac{dN}{dE}$
 - ↳ exemple: $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$: petit dN/dE

3.7.2 La règle d'or de Fermi pour les désintégrations:

Considérons la désintégration $1 \rightarrow 2 + 3 + 4 + \dots + n$ dans le système de repos de la particule 1. Son taux de désintégration est donné par la règle d'or de Fermi pour les désintégrations:

$$\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_1} \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4[P_1 - P_2 - \dots - P_n] \prod_{j=2}^n 2\pi \delta[p_j^2 - m_j^2 c^2] \theta[p_j^0] \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ conservation de P^μ	$\underbrace{\hspace{10em}}$ impose la relation de dispersion $\frac{E_j^2 - \vec{p}^2}{c^2} - m_j^2 c^2 = 0$	$\underbrace{\hspace{10em}}$ énergie > 0 dans $ z\rangle$	$\underbrace{\hspace{10em}}$ Somme sur tout les états possibles
---	--	--	--

où S est un facteur statistique qui corrige les doubles comptages (en cas de particules identiques dans l'état final).

3.7.3 La règle d'or pour les diffusions:

Considérons la diffusion $1+2 \rightarrow 3+4+\dots+n$

Sa section efficace est donnée par:

$$\sigma = \frac{S \hbar^2}{4(P_1 P_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} \int |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4[P_1 + P_2 - P_3 - \dots - P_n] \times$$

$$\prod_{j=3}^n 2\pi \delta[p_j^2 - m_j^2 c^2] \cdot \theta[p_j^0] \frac{d^4 p_j}{(2\pi)^4}$$

3.8 Résumé

- Le Modèle Standard de la physique des particules (MS) décrit les constituants de la matière les plus élémentaires connus actuellement, ainsi que leurs interactions électromagnétiques, faibles et fortes.

→ Il inclut:

- modèle des quarks
- théorie électrofaible
- QCD ($\alpha \ll 1$ et $q^2 \gg 1$)
- mécanisme BEH

Les théories qui décrivent ces interactions sont construites sur la QFT, avec des lagrangiens invariant sous

- transfo de Lorentz
- transfo de jauge locales

→ V transfo correspondant à une loi de conservation observée expérimentalement.

[4] INTERACTIONS FAIBLES

4.1 Introduction

→ Pour la QED, le terme d'interaction de Lagrangien était:

$$\mathcal{L}_I = -q \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu = -q j^\mu A_\mu$$

où $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ et où $j^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ est le courant fermionique

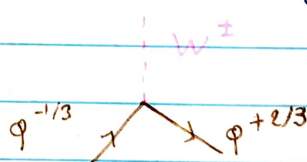
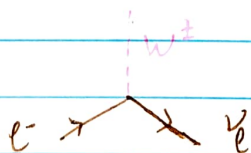
→ Pour la QCD, ce sera la même forme car $m(g)=0$, $Q_e(g)=0$ et $\hat{S}(g)=1$

→ La situation est très différente pour l'If à CC (If à courant chargé)

→ le boson intermédiaire $W^\pm$ est très massif ($\sim 80 \text{ GeV}$)

→ couple de fermions de charge différente

→ violation de la parité et de la conjugaison de charge



4.2 Opérateur parité qui agit sur les spineurs

→ Pour déduire l'opérateur parité P pour les spineurs, on démande de:

$$\Psi' = P\Psi \quad \text{et} \quad \Psi = P\Psi' \quad (\text{ou a bien } P^2\Psi = \Psi)$$

→ Ψ doit être solution de l'éq. de Dirac pour une particule libre:

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\Psi = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad i\gamma^0 \partial_0 \Psi + i\gamma^1 \partial_1 \Psi + i\gamma^2 \partial_2 \Psi + i\gamma^3 \partial_3 \Psi - m\Psi = 0$$

$$\text{Rappel: } \gamma^\mu \partial_\mu = \sum_\mu \gamma^\mu \partial_\mu = +\gamma^0 \partial_0 + \gamma^1 \partial_1 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3$$